Συνθήκες ανακύκλωσης.

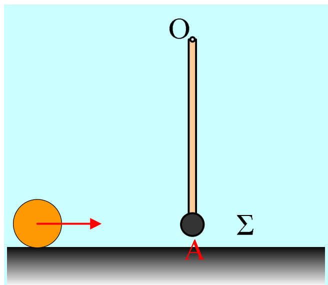
Με τον όρο ανακύκλωση, εννοούμε την συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται, ώστε ένα σώμα να μπορεί να διαγράφει ένα κατακόρυφο κύκλο.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) το σώμα είναι δεμένο σε ράβδο (είτε με μάζα, είτε αβαρή). Στην περίπτωση αυτή, αρκεί η ράβδος να μπορεί να φτάσει στην ανώτερη κατακόρυφη θέση, στην οποία θεωρούμε ότι η ταχύτητα μηδενίζεται.

Παράδειγμα 1°:

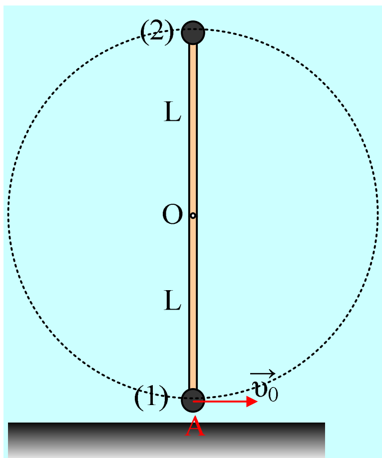
Μια σημειακή μάζα Σ είναι δεμένη στο άκρο Α αβαρούς ράβδου, μήκους L, η οποία μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά περνά από το άλλο της άκρο Ο. Σε μια στιγμή μια σφαίρα που κινείται οριζόντια συγκρούεται με με το σώμα Σ.



Ποια η ελάχιστη ταχύτητα του σώματος Σ, αμέσως μετά την κρούση, ώστε να κάνει ανακύκλωση; Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

Απάντηση:

Έστω υ_0 η ταχύτητα που αποκτά το σώμα Σ αμέσως μετά την κρούση. Για να μπορέσει να διαγράψει τον κατακόρυφο κύκλο του σχήματος, αρκεί η ταχύτητά του στην ανώτερη θέση (2) να ικανοποιεί την σχέση $\upsilon_2 \geq 0$ και οριακά $\upsilon_2=0$.



Μεταξύ των θέσεων (1) και (2) η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή και θεωρώντας την θέση (1) σαν επίπεδο μηδενικής ενέργειας έχουμε:

$$K_1+U_1=K_2+U_2 \rightarrow$$

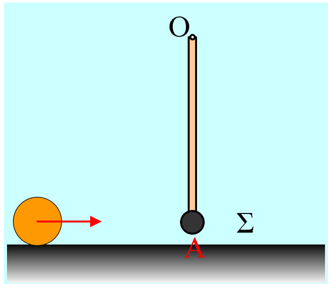
$$\tfrac{1}{2} M\upsilon_0^2 + 0=0+Mgh \rightarrow$$

$$\upsilon_0^2= 2g\cdot 2L \rightarrow$$

$$\upsilon_0 = 2\sqrt{gL}$$

Παράδειγμα 2°:

Μια σημειακή μάζα Σ m είναι δεμένη στο άκρο Α ομογενούς ράβδου μάζας Μ και μήκους L, η οποία μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά περνά από το άλλο της άκρο Ο. Σε μια στιγμή μια σφαίρα που κινείται οριζόντια συγκρούεται με με το σώμα Σ.

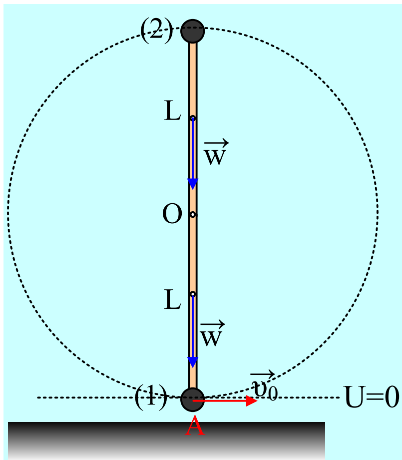


Ποια η ελάχιστη ταχύτητα του σώματος Σ, αμέσως μετά την κρούση, ώστε να κάνει ανακύκλωση;

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προν τον άξονα περιστροφής της I= 1/3 ML^2.

Απάντηση:

Έστω υ_0 η ταχύτητα που αποκτά το σώμα Σ αμέσως μετά την κρούση. Για να μπορέσει να διαγράψει τον κατακόρυφο κύκλο του σχήματος, αρκεί η ταχύτητά του στην ανώτερη θέση (2) να ικανοποιεί την σχέση $\upsilon_2 \geq 0$ και οριακά $\upsilon_2=0$.



Μεταξύ των θέσεων (1) και (2) η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή και θεωρώντας την θέση (1) σαν επίπεδο μηδενικής ενέργειας έχουμε:

$$K_1+U_1=K_2+U_2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 + Mg\frac{L}{2} = 0 + Mg\frac{3L}{2} + mg \cdot 2L \rightarrow$$

Αλλά:

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2, \text{ ενώ } \omega_0 = \frac{\upsilon_0}{L}$$

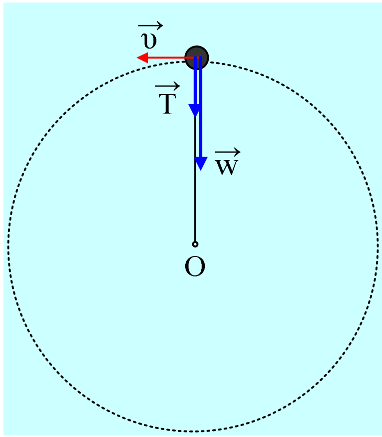
Οπότε με επίλυση έχουμε:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{6gL(M+2m)}{M+3m}}$$

2)	α) το σώμα είτε είναι δεμένο στο άκρο νήματος, είτε β) είναι ελεύθερο και κινείται κατά μήκος ενός κατακόρυφου οδηγού. Στην περίπτωση αυτή δεν αρκεί το σώμα να φτάσει στην ανώτερη θέση, αλλά θα πρέπει στην θέση αυτή να έχει μια ελάχιστη ταχύτητα .

Και ποια είναι αυτή η ταχύτητα;

A) Έστω ότι το σώμα είναι δεμένο στο άκρο νήματος και διαγράφει κατακόρυφο κύκλο.



Για την ανώτερη θέση έχουμε:

$$\Sigma F = m\frac{\upsilon^2}{R} \rightarrow$$

$$T + mg = m\frac{\upsilon^2}{L} \quad (1)$$

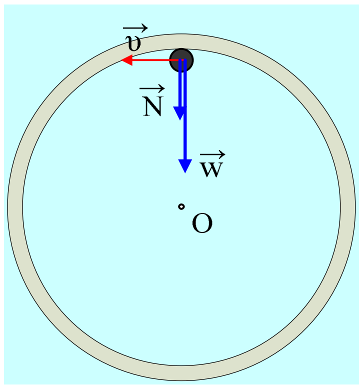
Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι όταν μειώνεται η ταχύτητα του σώματος, μειώνεται και η τάση του νήματος. Η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας, στην θέση αυτή, θα είναι εκείνη για την οποία T=0. Δηλαδή η ταχύτητα για την οποία το βάρος του σώματος παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου. Έτσι:

$$mg = m\frac{\upsilon_{\varepsilon\lambda}^2}{L} \rightarrow$$

$$\upsilon_{\varepsilon\lambda} = \sqrt{gL}$$

Αυτό είναι το μέτρο της ελάχιστης ταχύτητας που πρέπει να έχει το σώμα στην ανώτερη θέση.

B) Έστω μια σφαίρα, ακτίνας r, που κινείται διαγράφοντας κατακόρυφο οδηγό ακτίνας R, όπως στο σχήμα.



Για την ανώτερη θέση έχουμε:

$$\Sigma F = m\frac{\upsilon^2}{R'} \rightarrow$$

όπου R΄=R-r

$$N + mg = m\frac{\upsilon^2}{R-r} \quad (1)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι όταν μειώνεται η ταχύτητα του σώματος, μειώνεται και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου N. Η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας, στην θέση αυτή, θα είναι εκείνη για την οποία N=0. Δηλαδή η ταχύτητα για την οποία το βάρος του σώματος παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου. Έτσι:

$$mg = m\frac{\upsilon_{\varepsilon\lambda}^2}{R-r} \rightarrow$$

$$\upsilon_{\varepsilon\lambda} = \sqrt{g(R-r)}$$

Αυτό είναι το μέτρο της ελάχιστης ταχύτητας που πρέπει να έχει το σώμα στην ανώτερη θέση.

Η ακτίνα της σφαίρας είναι αμελητέα, R-r ≈ R και η σχέση μπορεί να γραφτεί:

$$\upsilon_{\varepsilon\lambda} = \sqrt{gR}$$

Προσέξτε ότι και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

dmargaris@sch.gr