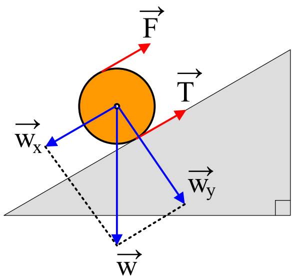
Εφαρμογή του $2^{ου}$ Νόμου σε σύνθετη κίνηση

Πώς εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής σε μια σύνθετη κίνηση; Δουλεύουμε με αλγεβρικές τιμές των μεγεθών ή με τα μέτρα τους; Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να μελετήσουμε την κίνηση ενός κυλίνδρου που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.
Οι γνωστές μας σχέσεις $\omega=\upsilon\cdot R$ και $\alpha_{cm}=\alpha_{γων}\cdot R$ συνδέουν τα μέτρα των μεγεθών αφού τα διανύσματα είναι μεταξύ τους ασύμβατα **κάθετα** ($\upsilon \perp \omega$ και $\alpha_{cm} \perp \alpha_{γων}$.)
Για να μην μπλέξουμε λοιπόν τα πρόσημα των μεγεθών αυτών προτείνεται να χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις αφού ορίσουμε κάθε φορά θετικές φορές (για την μεταφορική και για την περιστροφική κίνηση) με τέτοιο τρόπο ώστε να μην προκύπτουν αρνητικές τιμές για την επιτάχυνση του κέντρου μάζας και για την γωνιακή επιτάχυνση. Ας το δούμε με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα

Έστω ότι αφήνουμε σε ένα κεκλιμένο επίπεδο έναν κύλινδρο, γύρω από τον οποίο έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα στο άκρο του οποίου ασκούμε δύναμη $\vec{F}$ παράλληλη στο επίπεδο, όπως στο σχήμα. Να μελετηθεί η κίνηση του κυλίνδρου, με δεδομένο ότι δεν θα ολισθήσει, αν δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I=\frac{1}{2}mR^2$.



Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
1) Για ποια τιμή του μέτρου της δύναμης $\vec{F}$ ο κύλινδρος ισορροπεί;
Αφού ο κύλινδρος ισορροπεί:

$$\Sigma F=0 \text{ ή } \begin{cases} \Sigma F_x=0 \rightarrow F+T-w_x=0 \ (1) \\ \Sigma F_y=0 \end{cases}$$

Και $\Sigma\tau=0 \rightarrow -F\cdot R + T\cdot R=0 \rightarrow T=F$ με φορά όπως στο σχήμα, οπότε από την (1) έχουμε:

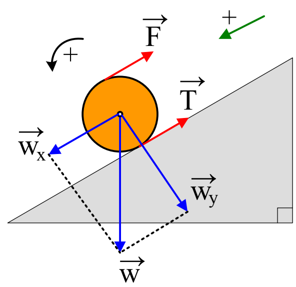
$$2F=w_x \rightarrow \boxed{F=\frac{w_x}{2}}.$$

Δηλαδή αν ασκήσουμε δύναμη παράλληλη προς το επίπεδο, με μέτρο ίσο με το μισό της συνιστώσας w_x του βάρους, τότε και η στατική τριβή είναι της ίδιας κατεύθυνσης με την δύναμη $\vec{F}$ και έχει το ίδιο μέτρο.

2) Το μέτρο της δύναμης είναι μικρότερο από το μισό της συνιστώσας του βάρους w_x, δηλαδή

$$\boxed{F<\frac{w_x}{2}}.$$

Αφού $w_x > F$ ο κύλινδρος τείνει να κινηθεί προς τα κάτω, επομένως και πάλι η στατική τριβή είναι προς τα πάνω, όπως στο σχήμα. Η δύναμη είναι τώρα μικρότερη από αυτή που εξασφαλίζει ισορροπία, επομένως ο κύλινδρος κυλίεται προς τα κάτω και στρέφεται αριστερόστροφα. Θεωρώ για την μεταφορική κίνηση θετική την προς τα κάτω κατεύθυνση και θετικές τις αριστερόστροφες ροπές, οπότε εφαρμόζοντας ξανά τον $2^{ο}$ Νόμο του Νεύτωνα έχουμε για τις δύο κινήσεις:



$$\Sigma F_x = m\cdot a \rightarrow w_x - F - T = m\cdot a_{cm} \ (3) \text{ και}$$

$$\Sigma\tau = I\cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R - F\cdot R = \frac{1}{2} mR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T - F = \tfrac{1}{2}\, m a_{cm} \ (4)$$

Με πρόσθεση των (3) και (4) κατά μέλη έχουμε:

$$W_x - 2F = \frac{3}{2} m\alpha_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{2(w_x - 2F)}{3m}$$

Οπότε από την (4) παίρνουμε για το μέτρο της τριβής:

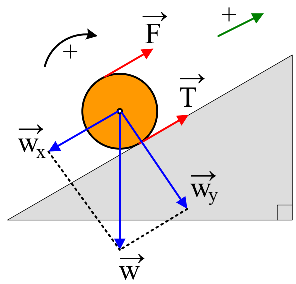
$$T = F + \tfrac{1}{2}\, m \frac{2(w_x - 2F)}{3m} = F + \frac{w_x}{3} - \frac{2F}{3} = \frac{w_x}{3} + \frac{F}{3} > 0$$

Προσέξτε η τριβή έχει κατεύθυνση προς τα πάνω και αυτό το έχουμε χρησιμοποιήσει με κατάλληλο πρόσημο τόσο στην εξίσωση (3), όσο και στην (4).

3) Το μέτρο της δύναμης είναι μεγαλύτερο από το μισό της συνιστώσας του βάρους w_x, δηλαδή

$$F > \frac{w_x}{2}.$$

Η δύναμη είναι τώρα μεγαλύτερη από αυτήν που εξασφαλίζει ισορροπία, επομένως ο κύλινδρος κυλίεται προς τα πάνω και στρέφεται δεξιόστροφα. Έστω ότι και πάλι η τριβή είναι προς τα πάνω. Θεωρώ για την μεταφορική κίνηση θετική την προς τα πάνω κατεύθυνση και θετικές τις δεξιόστροφες ροπές, οπότε εφαρμόζοντας ξανά τον 2^{o} Νόμο του Νεύτωνα έχουμε για τις δύο κινήσεις:



$$\Sigma F_x = m\cdot a \rightarrow F + T - w_x = m\cdot a_{cm} \ (1)$$

$$\Sigma\tau = I\cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot R - T\cdot R = \frac{1}{2} mR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F - T = \tfrac{1}{2}\, m a_{cm} \ (2)$$

$$2F - w_x = 3/2\, m a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{2(2F - w_x)}{3m}$$

και από την (2) παίρνουμε:

$$T = F - \tfrac{1}{2}\, m \cdot \frac{2(2F - w_x)}{3m} = F - \frac{2F}{3} + \frac{w_x}{3} = \frac{F}{3} + \frac{w_x}{3} > 0$$

πράγμα που σημαίνει ότι πράγματι η τριβή είναι όπως στο σχήμα.

dmargaris@sch.gr